1 Allgemeine Grundlagen

1.1 Gleichstromkreis

1.1.1 Stromdichte

Die Stromdichte in einem stromdurchflossenen Leiter mit der Querschnittsfläche A ist definiert als:

$$j = \frac{dI}{dA}$$

dI Stromelement
dA Flächenelement

1.1.2 Die Grundelemente R und L im Gleichstromkreis

1.1.2.1 Widerstand

An einem ohmschen Verbraucher besteht zwischen Strom und Spannung ein lineares Verhältnis. Es gilt das Ohmsche Gesetz:

$$u = i \cdot R$$

u Spannung
i Strom
R Widerstand

1.1.2.2 Induktivität

An einer Induktivität gilt: Die Spannung ist proportional zu der zeitlichen Änderung des Stromes.

$$u = L \cdot \frac{di}{dt}$$

L Induktivität
di Stromänderung
dt Zeitänderung

1.1.2.3 Temperaturabhängiger Widerstand

Reale Widerstände ändern ihren Wert in Abhängigkeit von der Temperatur. Der Zusammenhang ist in erster Näherung linear. Wird ein Widerstand R um $\Delta\vartheta$ erwärmt, so ändert sich dieser auf:

$$R_\vartheta = R_{20} \cdot (1 + \beta \cdot \Delta\vartheta)$$

β Temperaturbeiwert
R_{20} Widerstand bei Bezugstemperatur
$\Delta\vartheta$ Temperaturdifferenz

1.1.2.4 Spezifischer (materialabhängiger Widerstand)

Jeder Leiter ist mit Verlusten behaftet, d.h. jeder Leiter hat einen Widerstand der vom Material abhängig ist. Der spezifische Widerstand eines Leiter kann berechnet werden:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

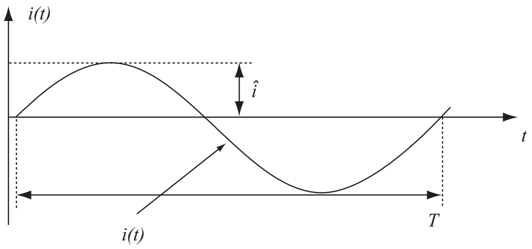
R Widerstand
l Länge
A Fläche
ρ spezifischer Widerstand

Material	Spez. Widerstand $\rho \cdot (\frac{\Omega \cdot mm^2}{m})$
Kupfer	0,017
Eisen	0,1 … 0,4

1.2 Wechselstromkreis

1.2.1 Wechselstromgrößen

Wechselgrößen sind dadurch gekennzeichnet, dass sie periodisch sind und der arithmetische Mittelwert Null ist.



i	Augenblickswert
$\hat{i}$	Scheitelwert, Amplitude
T	Periodendauer
t	Zeit

Bild 1.2.1: Kenngrößen einer Wechselgröße

1.2.1.1 Arithmetischer Mittelwert

$$\bar{i} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i(t) \cdot dt$$

Er entspricht der gesamten Fläche unter der Kurve in einer Periode unter Berücksichtigung des Vorzeichens.

1.2.1.2 Der Gleichrichtwert

$$|\bar{i}| = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T |i(t)| \cdot dt$$

Er entspricht der positiven Gesamtfläche unter der Kurve in einer Periode.

1.2.1.3 Der Effektivwert

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2(t) \cdot dt}$$

Der Effektivwert entspricht dem Gleichstromwert der in einer Periode an einem ohmschen Verbraucher dieselbe Energie umwandelt.

1.2.2 Der Drehstromkreis

Ein Mehrphasensystem ist ein Wechselstromsystem, das mehr als zwei Leiter hat. Hier werden Systeme mit drei Phasen betrachtet:

- Im Stromkreis haben die Spannungen in den verschiedenen Strängen die gleiche Frequenz und gleiche Amplituden.
- Die Spannungen sind jeweils um 120° versetzt.
- Die Summe der drei symmetrischen Größen ist stets Null.

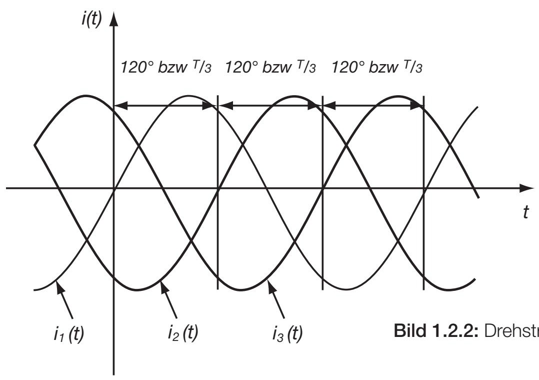


Bild 1.2.2: Drehstrom

1.2.3 Zeigerdiagramm

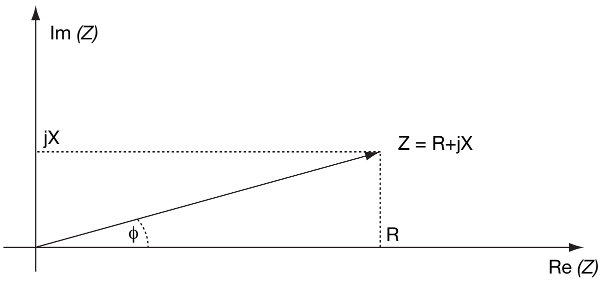


Bild 1.2.3: Das Zeigerdiagramm in der komplexen Zahlenebene.

Die rechnerische Behandlung ist im Zeitbereich, also in der Liniendarstellung, für den praktischen Gebrauch sehr unhandlich. Zur Vereinfachung geht man in den Bildbereich, in dem die sinusförmige Schwingung als komplexer Zeiger dargestellt wird.

- Dabei entspricht die Länge des Zeigers dem Scheitelwert der Wechselgröße
- Der Zeiger rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit, oftmals wird aber die Zeit, wie hier im Bild “eingefroren”, so dass ein zu einem bestimmten Zeitpunkt zugehöriges Diagramm entsteht.
- Die Phasenverschiebung wird durch die Lage des Zeigers beschrieben.
- Zeigerdarstellungen gelten für Wechselstromgrößen gleicher Frequenz.

1.2.4 Die Grundelemente R und L im Wechselstromkreis

1.2.4.1 Widerstand

An einem ohmschen Verbraucher sind Strom und Spannung in Phase, d.h. es besteht, wie im Gleichstromkreis, zwischen Strom und Spannung ein lineares Verhältnis. Es gilt weiterhin das Ohmsche Gesetz.

$$u = i \cdot R$$

u Spannung
i Strom
R Widerstand

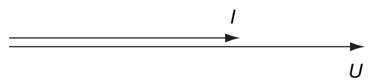


Bild 1.2.4: Zeigerdiagramm des Widerstandes.

Der Zeiger des Widerstandes ist rein reell und liegt auf der reellen Achse. Zwischen Strom und Spannung gibt es keine Phasenverschiebung.

1.2.4.2 Induktivität

Im Wechselstromkreis ist der Verlauf des Stromes sinusförmig. Die Spannung, die zur zeitlichen Änderung, also der Ableitung des Stromes proportional ist, ergibt sich nun zu:

$$u = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{d(\hat{i} \cdot \sin(\omega t))}{dt} = L \cdot \omega \cdot \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

L Induktivität
ω Winkelgeschwindigkeit

Der Strom eilt der Spannung um eine viertel Periode nach. Eine Phasenverschiebung wird im Zeigerdiagramm durch eine Drehung des Zeigers dargestellt.

Der Zeiger der Induktivität ist rein imaginär und liegt auf der imaginären Achse.
Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung ist 90°.

Bild 1.2.5: Zeiger der Induktivität.

1.3 Das magnetische Feld

1.3.1 Beschreibung des magnetischen Feldes

Die Stärke und Richtung eines magnetischen Feldes kann mit Hilfe eines Probemagneten oder einem stromdurchflossenen Leiter bestimmt werden. Mathematisch kann das Magnetfeld durch ein Vektorfeld beschrieben werden. Die Ursache des magnetischen Feldes sind elektrische Ströme. Von ihnen hängen Betrag und Richtung der Wirklinien des Feldes ab.

Die magnetischen Feldlinien weisen folgende Eigenschaften auf:

- Die Tangente an die Feldlinien gibt die Kraftrichtung an.
- Die Feldlinien schneiden sich nicht.
- Die Dichte der gezeichneten Feldlinien sind ein Maß für die Stärke der Kraftwirkung der magnetischen Feldstärke.

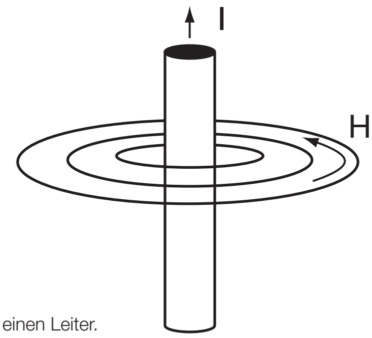


Bild 1.3.1: Feldlinienverlauf um einen Leiter.

1.3.2 Magnetische Feldstärke und Durchflutungsgesetz

Um einen stromdurchflossenen Leiter bilden sich wie im Bild konzentrische Kreise aus. Das Durchflutungsgesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen Stromstärke und der magnetischen Feldstärke.

$$\Theta = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$\vec{H}$	magnetische Feldstärke
$d\vec{s}$	Wegelement
$\vec{J}$	Stromdichte
$d\vec{A}$	Flächenelement

Auf einer geschlossenen magnetischen Feldlinie $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s}$ ist die magnetische Spannung Θ.

Das Integral $\int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$ ist die elektrische Durchflutung.

Wie in Bild 1.3.2 können sich mehrere Magnetfelder überlagern. Nach dem Durchflutungsgesetz gilt dann für die magnetische Spannung:

$$\Theta = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

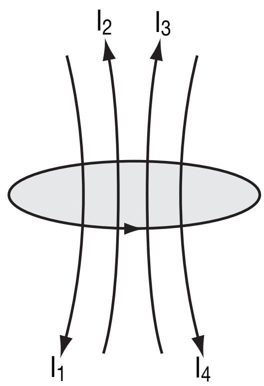


Bild 1.3.2: Stromdurchflossene Leiter und die magnetische Spannung

1.3.3 Die magnetische Flussdichte

Die magnetische Flussdichte ist definiert als:

$$B = \frac{d\vec{\Phi}}{d\vec{A}}$$

$\vec{\Phi}$	magnetischer Fluss
$d\vec{A}$	Flächenelement

Daraus lässt sich der magnetische Fluss Φ durch eine Fläche berechnen:

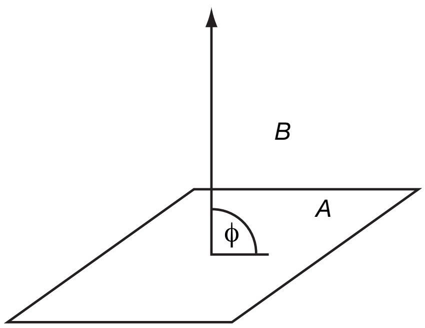


Bild1.3.3: Magnetischer Fluss durch eine Fläche

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = B \cdot \cos(\varphi) \cdot dA$$

$\vec{B}$ magnetische Flussdichte
$d\vec{A}$ Flächenelement

Zwischen der magnetischen Feldstärke und der magnetischen Flussdichte gilt im Vakuum der Zusammenhang:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} \qquad \mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

1.3.4 Das Induktionsgesetz für ruhende Anordnungen

Es gilt, dass jede zeitliche Änderung des magnetischen Flusses Φ eine elektrische Spannung induziert.

$$u_{ind} = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

N Windungen

- Die Spannung ist proportional zur Windungszahl N und zur zeitlichen Änderung des Flusses.
- Die Spannung ist der Ursache entgegengesetzt (Lenz'sche Regel).
- Es ist gleichgültig, ob die Änderung des Flusses durch eine Änderung des Magnetfelds (Transformatorprinzip) oder einer Änderung der Fläche (Generatorprinzip) hervorgerufen wird.

1.3.5 Magnetische Kopplung

Leiteranordnungen, die sich gegenseitig über ein Magnetfeld beeinflussen nennt man magnetisch gekoppelt. Durch die Kopplung kann ein Strom in einer Anordnung eine Spannung in einer anderen induzieren.
In Bild 1.3.4 soll Spule 2 offene Klemmen haben und in Spule1 ein sich zeitlich ändernder Strom fließen. Der Strom in Spule 1 erzeugt dem Fluss Φ_{11} dessen Teilfluss Φ_{21} auch Spule 2 durchsetzt.
Die Doppelindizierung ist wie folgt zu verstehen:

1. Index: Ort der Wirkung
2. Index: Ort der Entstehung

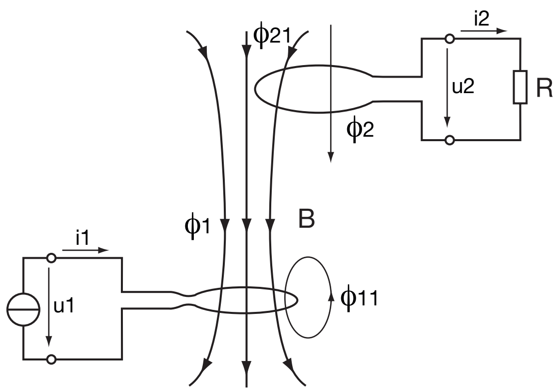


Bild 1.3.4: Magnetische Kopplung

Es muss hier mit den sogenannten Verkettungsflüssen Ψ_{11} und Ψ_{21} gerechnet werden, da nicht sämtliche Windungen von dem selben Fluss durchsetzt werden. Es entstehen folgende Spannungen:

In Spule 1: $u_1 = u_{R1} + u_{L1} = i_1 \cdot R_1 + \frac{d\Psi_{m11}}{dt}$ In Windung 2: $u_2 = \frac{d\Psi_{m21}}{dt}$

Betrachtet man den umgekehrten Fall, also dass in Spule 2 der Strom den Fluss induziert, und in Spule 1 bei offenen Klemmen der Teilfluss die Spannung induziert, dann ergibt sich:

für Windung 2: $u_2 = u_{R2} + u_{L2} = i_2 \cdot R_2 + \frac{d\Psi_{m22}}{dt}$ für Windung 1: $u_1 = \frac{d\Psi_{m12}}{dt}$

Fließen in beiden Spulen Ströme, dann ergibt sich ein magnetisches Feld, mit dem beide Spulen verkettet sind. Die Klemmenspannungen ergeben sich zu:

$$u_1 = i_1 \cdot R_1 + \frac{d\Psi_{m1}}{dt} \qquad u_2 = i_2 \cdot R_2 + \frac{d\Psi_{m2}}{dt}$$

Besteht der Feldraum aus einem Medium, in dem gilt *B = f (H)* ist linear, so gilt für den Verkettungsfluss jeder Spule:

$$\Psi_{m1} = \Psi_{m11} + \Psi_{m12} \qquad \Psi_2 = \Psi_{m22} + \Psi_{m21}$$

Man definiert nun die gegenseitige Induktivität:

$$L_{12} = \frac{\Psi_{m12}}{I_2}; \qquad L_{21} = \frac{\Psi_{m21}}{I_1}$$

Ψ Verkettungsfluss

Die gegenseitige Induktivität zweier Leiteranordnungen ist ein Maß für die Verkettung.